PREMIÈRE PARTIE
ONDE ACOUSTIQUE DANS UN FLUIDE PARFAIT

Le fluide est supposé parfait, son mouvement est décrit sans prendre en compte les effets de viscosité et les échanges thermiques à l'intérieur du fluide. Les détentes et compressions locales du fluide sont isentropiques ; V(P) étant le volume du fluide et P sa pression, le coefficient de compressibilité isentropique, constant pour le fluide, s'écrit :

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S .$$

La propagation des ondes sonores est associée à un écoulement irrotationnel. Les effets de pesanteur ne sont pas pris en compte.

Un tuyau cylindrique horizontal infini de section S_0 constante et d'axe x'x (figure 1) contient un fluide parfait compressible qui, au repos, possède une masse volumique μ_0 et se trouve à la pression P_0 et à la température T_0. Ces grandeurs sont uniformes dans l'espace.

L'équilibre est perturbé par le passage d'une onde acoustique plane qui se propage dans le cylindre suivant la direction Ox. La perturbation unidirectionnelle ne dépend ainsi que de l'abscisse x le long du « tuyau sonore » et du temps t. Dans le milieu perturbé, u(x,t) représente le déplacement à l'instant t du fluide situé au repos à l'abscisse x.

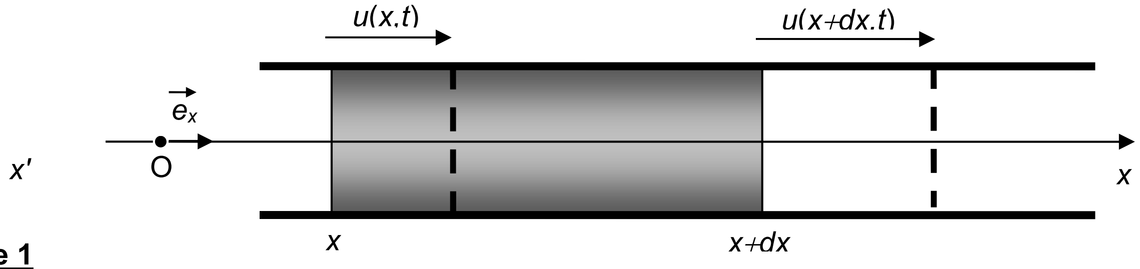


Figure 1

Les champs de pression et de masse volumique dans le fluide dépendent du temps et de l'espace ; ils peuvent s'écrire sous la forme :

$$P(x,t) = P_0 + p(x,t) \qquad |p(x,t)| << P_0$$

$$\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t) \qquad |\mu_1(x,t)| << \mu_0$$

La vitesse acoustique, ou vitesse vibratoire en un point d'abscisse x, est liée au déplacement du fluide et définie par : $\vec{v}(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,\vec{e}_x$.

L'étude est effectuée dans le cadre de « l'approximation acoustique » limitée aux mouvements de faible amplitude : le déplacement u(x,t), la vitesse acoustique $v(x,t)$, la pression acoustique (ou surpression) p(x,t) et la variation de masse volumique du fluide $\mu_1(x,t)$ ainsi que leurs dérivées sont des infiniment petits du premier ordre.

A / CÉLÉRITÉ DU SON

La linéarisation consiste à ne garder dans les équations que les termes d'ordre un en p, v et μ_1.

A1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la tranche de fluide de volume S_0dx subissant la perturbation (raisonner sur la figure 1), établir à l'ordre un l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t}.$$

A2. Retrouver cette équation, en précisant les hypothèses, par linéarisation de l'équation d'Euler :

$$\mu\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right] = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu\,\vec{g}.$$

A3. Exprimer l'accroissement relatif δ du volume de la tranche de fluide S_0dx entre l'état de repos et l'état perturbé. En déduire la surpression correspondante : $p(x,t) = -\dfrac{1}{\chi_S}\dfrac{\partial u}{\partial x}$ et sa dérivée par rapport au temps : $\dfrac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{\chi_S}\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

A4. Etablir l'équation de propagation relative à la surpression p(x,t) : $\dfrac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2}$.

Donner l'expression de la vitesse de propagation C de l'onde acoustique le long de l'axe Ox en fonction de χ_S et μ_0.

A5. Le fluide est de l'air assimilé à un gaz parfait à la température $T_0 = 293\,K$. Après avoir déterminé χ_S en fonction du rapport γ des capacités thermiques molaires du gaz et de la pression P_0, établir l'expression de C en fonction de T_0, du rapport γ, de la masse molaire M du fluide et de la constante R des gaz parfaits.

- *Dans ces conditions, la célérité du son dans l'air est $C_{air} = 340\ m.s^{-1}$.*

A6. Comparer la célérité dans l'air C_{air} à la célérité C_{eau} du son dans l'eau dont le coefficient de compressibilité isentropique est $\chi_S = 5.10^{-10}\ Pa^{-1}$ et la masse volumique $\mu_0 = 10^3\ kg.m^{-3}$. Donner un ordre de grandeur de la célérité C_{sol} du son dans un solide. De quels paramètres du solide dépend-elle ? *Donnée* : $\dfrac{1}{\sqrt{0,5}} \approx 1,4$.

B / IMPÉDANCES EN ACOUSTIQUE

L'onde plane progressive acoustique se déplace dans le sens des x croissants au sein d'une conduite de section constante S_0. Le déplacement est de la forme : $u(x,t) = f\left(t - \dfrac{x}{C}\right)$.

- *L'impédance caractéristique Z du <u>fluide</u> où se propage l'onde, est définie par le rapport pression acoustique / vitesse acoustique suivant :* $Z = \dfrac{p(x,t)}{v(x,t)}$.

B1. Montrer que l'impédance caractéristique du fluide est une constante Z_C à préciser en fonction de μ_o et C (démonstration pour une OPHH puis généralisation aux OPP grâce au théorème de Fourier). Donner son unité dans le Système International.

Calculer Z_{air} dans le cas de l'air à 20°C, sa masse volumique étant $\mu_{air} = 1,3\,kg.m^{-3}$.

B2. Comparer, sans préciser les valeurs numériques, les impédances caractéristiques d'un gaz, d'un liquide et d'un solide.

B3. Exprimer l'impédance caractéristique du fluide pour l'onde inverse, onde plane progressive de la forme : $u(x,t) = f\left(t + \dfrac{x}{C}\right)$, se déplaçant dans le sens des x décroissants.

- *L'impédance acoustique Z_a de la <u>conduite</u> est définie par le rapport de la pression acoustique sur le débit volumique du fluide. Pour un tuyau de section constante S_0, elle s'écrit :*

$$Z_a = \frac{p(x,t)}{S_0\, v(x,t)}.$$

B4. Justifier à l'aide d'une analogie électrocinétique ce terme « impédance » adopté pour caractériser la propagation du son dans la conduite. Donner l'expression de l'impédance acoustique Z_a d'un tuyau sonore cylindrique, en fonction de sa section S_0, de la masse volumique μ_o du fluide qu'il contient et de la vitesse C du son dans le fluide.

C / INTENSITÉ SONORE

La puissance sonore instantanée $\mathrm{P}\,(x,t)$ *transportée par l'onde plane progressive à travers une surface* $\vec{S} = S\,\vec{e}_x$ *orthogonale à la direction de propagation* $\vec{e}_x$*, est définie par :* $\mathrm{P}\,(x,t) = \vec{\pi}\,(x,t) \cdot \vec{S}$*, où* $\vec{\pi}\,(x,t)$ *est le vecteur densité volumique de courant d'énergie ou puissance surfacique transportée :* $\vec{\pi}(x,t) = p(x,t)\,\vec{v}(x,t)$.

L'intensité $I(x)$ *de l'onde sonore est, par définition, la valeur de la puissance moyenne temporelle transférée par l'onde sonore à travers une surface unité d'abscisse x perpendiculaire à sa direction de propagation Ox :* $I(x) = \langle \pi \rangle$.

► *Si a (M,t) et b (M,t) sont deux fonctions sinusoïdales de même pulsation,* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *leurs représentations complexes associées, alors la valeur moyenne temporelle, notée* $< a.b >$*, du produit* $a(M,t).b(M,t)$*, est obtenue par la relation :*

$$< a.b > = \frac{1}{2}\Re e\left[\underline{a}\,\underline{b}^*\right] = \frac{1}{2}\Re e\left[\underline{a}^*\,\underline{b}\right] \text{ , et en particulier } < a^2 > = \frac{1}{2}|\underline{a}|^2 .$$

$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}\;\underline{a}^*}$ *est le module de la grandeur complexe* $\underline{a}$.

Le domaine de fréquences accessibles à l'oreille humaine s'étend de 20 Hz à environ 20 kHz. A une fréquence de 1 kHz, l'oreille est capable de percevoir un son dont la densité de courant énergétique vaut $10^{-12} W.m^{-2}$ *et la perception devient douloureuse à* $1\,W.m^{-2}$*. Vu l'énorme différence d'ordre de grandeur entre ces valeurs extrêmes, une échelle logarithmique s'impose. Le seuil de perception* $I_0 = 10^{-12} W.m^{-2}$ *est pris comme référence et, à une densité de courant énergétique* I *(en* $W.m^{-2}$*), est associée une intensité sonore en décibel définie par :*

$$I_{dB} = 10\,log\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

L'émetteur, en $x = 0$*, génère une vibration sinusoïdale de pulsation* ω *de la forme :*

$$u\,(0,t) = U_m\,cos(\omega t).$$

U_m *représente l'amplitude du déplacement. L'onde plane progressive qui se propage le long du tuyau supposé infini selon la direction Ox est représentée par :*

- *en notation réelle :* $u\,(x,t) = U_m\,cos(\omega t - kx)$,
- *en notation complexe :* $\underline{u}\,(x,t) = U_m\,exp\left[j(\omega t - kx)\right]$.

C1. Déterminer le nombre d'onde k en fonction de ω et de la célérité C de l'onde. Que représente-t-il ? Retrouver, en fonction de μ_0 et C, l'expression de l'impédance caractéristique du fluide : $Z = \frac{\underline{p}(x,t)}{\underline{v}(x,t)}$.
Déterminer P_m et V_m, les valeurs maximales de $p(x,t)$ et $v(x,t)$, en fonction de ω, μ_o, C et de l'amplitude U_m.

C2. Quelle est l'expression de l'intensité acoustique $I = \langle \pi \rangle$ pour l'onde plane progressive harmonique en fonction de P_m et de l'impédance caractéristique du fluide Z ?

C3. Exprimer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ transportée à travers une conduite de section constante S_0, en fonction de P_m et de l'impédance acoustique de la conduite Z_a.

C4. L'onde sonore de fréquence 1 kHz se propage dans l'air d'impédance caractéristique Z_{air}. Le tableau suivant donne, au seuil de perception et au seuil de douleur, les ordres de grandeur des intensités I_{dB} en décibel, ainsi que les pression, vitesse et amplitude maximales des vibrations notées respectivement P_m, V_m et U_m :

	I (en $W.m^{-2}$)	I (en dB)	P_m (en Pa)	V_m (en $m.s^{-1}$)	U_m (en m)
seuil de perception	10^{-12}	0	3.10^{-5}	$0,7.10^{-7}$	10^{-11}
seuil de douleur	1	120	30	$0,7.10^{-1}$	10^{-5}

Justifier « l'approximation acoustique ». Commenter succinctement la sensibilité de l'oreille et son domaine d'audition.

C5. Quelle est, en décibels, l'intensité sonore résultant de la superposition de deux ondes sonores émises par deux sources indépendantes d'intensité 60 dB ?
Donnée : $\log 2 \approx 0,3$.

DEUXIEME PARTIE
REFLEXION ET TRANSMISSION EN INCIDENCE NORMALE

D / TUYAU SONORE : INFLUENCES DES FLUIDES ET D'UN RACCORDEMENT

Une conduite est constituée de deux tubes cylindriques de sections respectives S_1 et S_2, de même axe x'x et séparés par le plan $x = 0$. Deux fluides non miscibles se répartissent de part et d'autre de ce plan (figure 2).

- *$x < 0$: le fluide **1** est de masse volumique μ_1 ; le son s'y propage à la célérité C_1 ;*
- *$x > 0$: le fluide **2** est de masse volumique μ_2 ; le son s'y propage à la célérité C_2.*

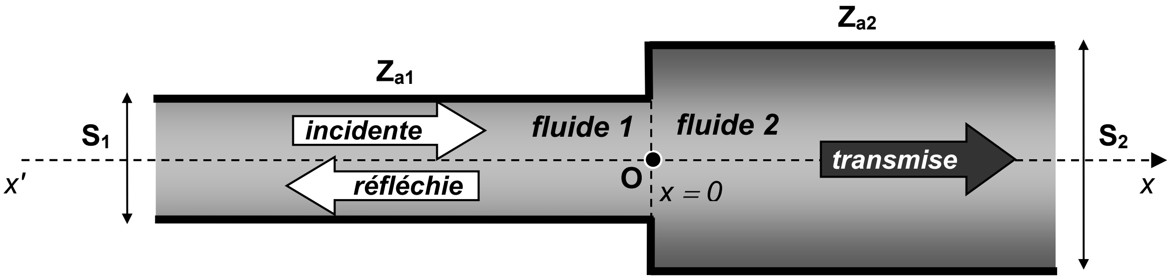


Figure 2

Les impédances acoustiques Z_{a1} et Z_{a2} des tubes de sections respectives S_1 et S_2 sont liées aux impédances caractéristiques Z_1 et Z_2 des milieux par les relations :

$$Z_{a1} = \frac{\mu_1 C_1}{S_1} = \frac{Z_1}{S_1} \quad \text{pour } x < 0 \qquad Z_{a2} = \frac{\mu_2 C_2}{S_2} = \frac{Z_2}{S_2} \quad \text{pour } x > 0 \quad \text{avec } \alpha = \frac{Z_{a1}}{Z_{a2}}.$$

*Une onde de pression plane progressive harmonique incidente $p_i(x,t)$ se propage dans le milieu **1** selon le sens des x croissants. La discontinuité de l'impédance au niveau du raccordement donne naissance en $x = 0$ à :*

- *une onde de pression transmise dans le milieu **2**, $p_t(0,t)$ dont la puissance est P_t,*
- *une onde de pression réfléchie dans le milieu **1**, $p_r(0,t)$ dont la puissance est P_r.*

Les pressions acoustiques incidente, transmise et réfléchie s'expriment par :

$$p_i(x,t) = P_{im}\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{C_1}\right)\right] \qquad p_t(x,t) = P_{tm}\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{C_2}\right)\right] \qquad p_r(x,t) = P_{rm}\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{C_1}\right)\right]$$

La puissance moyenne $\langle P_i \rangle$ est associée à l'onde incidente. Les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance sont définis par les valeurs absolues des rapports des puissances moyennes transportées :

$$R = \left| \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} \right| \quad et \quad T = \left| \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} \right|.$$

D1. Montrer que le déplacement incident, correspondant à $p_i(x,t)$, s'écrit sous la forme : $u_i(x,t) = U_{im} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{C_1}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$. Exprimer U_{im} en fonction de P_{im}, ω, C_1 et μ_1.

D2. Donner les puissances moyennes transportées $\langle P_i \rangle$, $\langle P_r \rangle$ et $\langle P_t \rangle$ en fonction de P_{im}, P_{rm}, P_{tm} et des impédances acoustiques des tubes, notées Z_{a1} et Z_{a2}.

D3. En utilisant les conditions de passage de l'onde à l'interface des deux fluides (continuité de la pression et du ***débit volumique***), écrire deux équations reliant P_{im}, P_{rm}, P_{tm} et α.

D4. Déterminer, en fonction de α, les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de pression : $r_P = \frac{p_r(0,t)}{p_i(0,t)}$ et $t_P = \frac{p_t(0,t)}{p_i(0,t)}$.

D5. Exprimer les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance à travers l'interface en fonction du seul coefficient α.
Quelle relation existe-t-il entre R et T ? Que traduit-elle ?

Influence des deux milieux pour une conduite de section constante : $S_1 = S_2 = S_0$

La discontinuité de l'impédance au niveau du raccordement est liée à la différence de nature entre les deux fluides.

D6. Le milieu **2** est l'air, d'impédance caractéristique Z_{air2} et le milieu **1** l'intérieur du corps humain dont les constituants sont caractérisés par une impédance caractéristique $Z_{corps1} \gg Z_{air2}$. Evaluer r_P et t_P, puis T et R. Commenter.
Calculer l'atténuation en décibel $T_{dB} = 10 \log(T)$, correspondant au coefficient de transmission $T = 1{,}7.10^{-3}$. Pourquoi le médecin utilise-t-il un stéthoscope pour écouter les battements cardiaques ou les murmures respiratoires ? *Donnée : $\log 17 \approx 1{,}2$.*

Influence du raccordement des deux conduites pour un fluide unique : $\alpha = S_2/S_1$

Un fluide de masse volumique au repos μ_0 dans lequel le son se propage à la célérité C occupe la conduite constituée des deux tubes de sections différentes S_1 et S_2. La discontinuité de l'impédance au niveau du raccordement est représentée par le changement de section.

D7. Tracer l'allure de la fonction $R(\alpha)$. Pour quelle valeur de α, y a-t-il adaptation de l'impédance ? Commenter les cas limites : $S_2 \ll S_1$ et $S_2 \gg S_1$.

E / PAVILLON EXPONENTIEL ET ADAPTATION DE L'IMPÉDANCE

Un pavillon acoustique rigide de longueur L, d'axe de révolution Ox et de section circulaire S(x) (figure 3) contient un fluide au repos de pression P_0, de masse volumique μ_o et de coefficient de compressibilité isentropique χ_S constant. Les effets de pesanteur sont négligés.

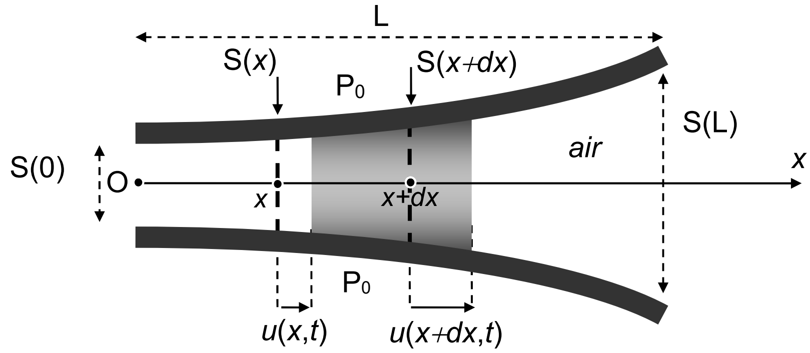


Figure 3

L'équilibre est perturbé par une onde sonore de faible amplitude qui se propage dans le pavillon suivant Ox. Elle est caractérisée par le déplacement longitudinal u(x,t) du fluide situé au repos à l'abscisse x, par la pression acoustique p(x,t) et par la vitesse acoustique $\vec{v}(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,\vec{e}_x$ dont la composante radiale est négligée. L'équation d'Euler les relie par l'équation différentielle : $\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$.

Le champ de pression dans le fluide dépend du temps et de l'espace par la relation :

$$P(x,t) = P_0 + p(x,t) \qquad |p(x,t)| << P_0$$

E1. Exprimer l'accroissement relatif δ du volume S(x)dx de la tranche de fluide entre l'état de repos et l'état de mouvement. En déduire la surpression correspondante $p(x,t)$ en fonction de χ_S, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{d\ln S(x)}{dx}$ (montrer que $\delta = \frac{d\ln S(x)}{dx}u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$).

E2. Démontrer l'expression de l'équation d'onde à laquelle obéit $p(x,t)$ dans le pavillon :

$$\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d\ln S(x)}{dx}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}.$$

La section circulaire du pavillon varie selon la loi : $S(x) = S(0)\,e^{x/a}$, avec $a > 0$.

E3. Sachant que l'onde sonore se propage à la célérité C, écrire l'équation de propagation précédente en fonction de C, a et de dérivées spatiales et temporelles de $p(x,t)$.

L'onde sonore est considérée plane progressive harmonique, de la forme :

$$\underline{p}(x,t) = P_m \exp\left[j\left(\omega t - \underline{k}x\right)\right].$$

Le nombre d'onde $\underline{k}$ est, a priori, complexe : $\underline{k} = k' - j\,k''$, k' et k'' étant réels.

E4. Mettre en évidence dans l'expression de $\underline{p}(x,t)$ les termes d'amortissement et de propagation.

E5. Etablir la relation de dispersion reliant $\underline{k}$, ω, a et C.

E6. Montrer que le pavillon se comporte comme un filtre passe-haut ; préciser sa pulsation de coupure ω_C en fonction de a et C.

E7. Exprimer la fréquence de coupure f_C en fonction de C, L, S(0) et S(L).

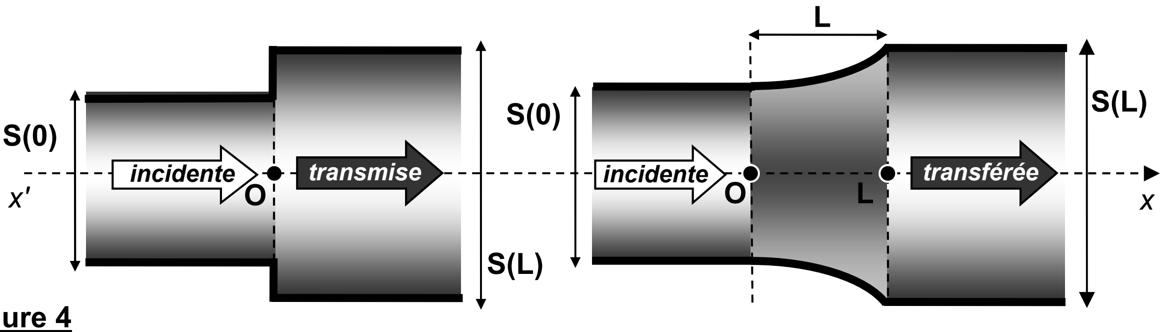
❖ *La fréquence de coupure du pavillon acoustique est $f_C = 150\,Hz$.*

E8. L'onde sonore progressive se propage suivant $x > 0$. Déterminer le réel k' en fonction de C, ω_C et ω, ainsi que le réel k'' en fonction uniquement de a.

E9. Déterminer la puissance moyenne transférée par l'onde sonore à travers la surface S(x) perpendiculaire à sa direction de propagation, en fonction de P_m, μ_0, C, S(0), ω et ω_C. Commenter.

Montrer que $\langle \mathcal{P}(x) \rangle = \dfrac{1}{2\mu_0 c}\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_C}{\omega}\right)^2}\, P^2(0) S(0)$.

Le pavillon acoustique est intercalé dans le raccordement de deux conduites de sections S(0) et S(L) comme l'indique la <u>*figure 4*</u> *ci-dessous :*



<u>Figure 4</u>

E10. Déterminer, pour $\omega > 10\,\omega_C$, le coefficient de transmission $T_{pav} = \dfrac{\langle P_{\text{transférée}} \rangle}{\langle P_{\text{incidente}} \rangle}$ relatif aux puissances acoustiques incidente à l'entrée et transférée à la sortie du pavillon de longueur L. Que peut-on dire du rapport des intensités sonores transférée et incidente $\dfrac{I_{\text{transférée}}}{I_{\text{incidente}}}$? Commenter.

E11. Comparer T_{pav} au coefficient de transmission en puissance T de la conduite en l'absence de pavillon (situation considérée aux questions <u>D5.</u> et <u>D7.</u>) en exprimant le rapport $\dfrac{T_{pav}}{T}$ en fonction de α. Préciser la valeur numérique de ce rapport pour $\alpha = 9$. Commenter en précisant le gain en décibel obtenu par le pavillon intercalé.
Donnée : *log36 ≈ 1,56.*

D'après e3a PSI 2011